令和５年度 岐阜薬科大学 学力検査問題 数学 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \ \bigl(x+y-1\bigr)\bigl(x^2+y^2-2\bigr) \leqq 0$

(1)

$$\bigl(x+y-1\bigr)\bigl(x^2+y^2-2\bigr) \leqq 0 \iff \begin{cases} 「x+y-1 \leqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2-2 \geqq 0」\cdots\cdots ① \\ \text{または} \\ 「x+y-1 \geqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2-2 \leqq 0」\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり，　① $\iff$ 「$y \leqq -x+1$ かつ $x^2+y^2 \geqq 2$」　の表す領域は図 1，

② $\iff$ 「$y \geqq -x+1$ かつ $x^2+y^2 \leqq 2$」　の表す領域は図 2

である。これらを合わせた領域のうち「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」を満たす部分が領域 D なので，求める領域 D は図 3 である。

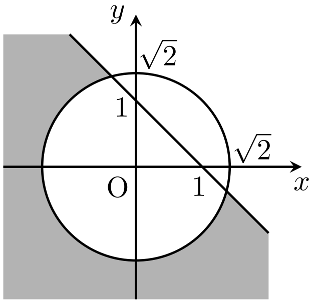


図 1

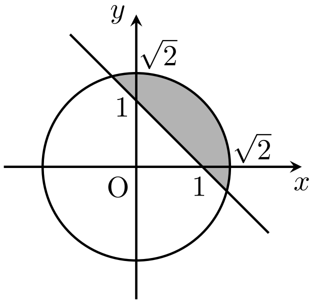


図 2

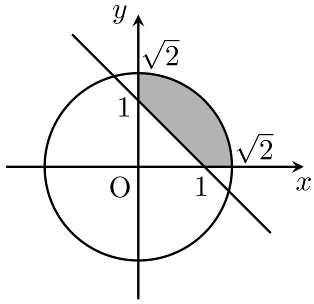


図 3

(2) 直線 $2x+y=k$（$\iff y=-2x+k\ \cdots\cdots$ ③）と領域 D が共有点をもつような実数 k の，最小値および最大値を求めればよい。③において，k は，傾き -2 の直線の y 切片である。直線③と領域 D が共有点をもつように，k の値を変化させる。このとき，

- 図 4 のように③が点 $(0,1)$ を通るとき，k は最小値 1 をとる。
- 図 5 のように③が円 $x^2+y^2=2$ と第 1 象限で接するとき，k は最大値をとる。

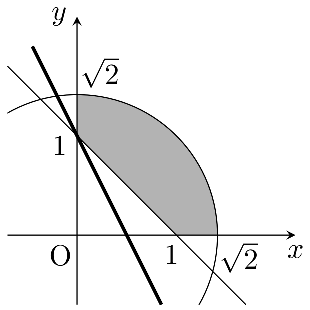


図 4

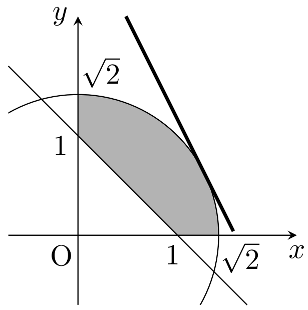


図 5

以下，k の最大値を求める。③と $x^2+y^2=2$ が接するための条件は，原点と③（$\iff 2x+y-k=0$）との距離が $\sqrt{2}$ となることである。よって，

$$\frac{|2\cdot 0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{2} \quad\iff\quad |k|=\sqrt{10} \quad\iff\quad k=\pm\sqrt{10}$$

このうち接点が第 1 象限であるものは $k=\sqrt{10}$ である。このとき，

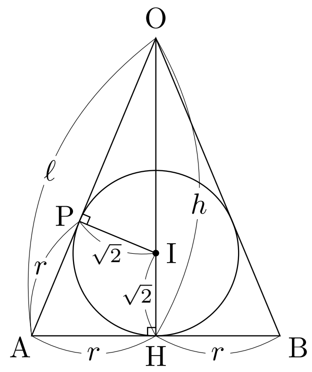
③と $x^2+y^2=2$ の接点は，③（$\iff\ y=-2x+\sqrt{10}$）と $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点に一致する。

$\dfrac{1}{2}x=-2x+\sqrt{10} \iff x=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ より，この交点は $\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\ \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ である。

以上より，$2x+y$ は，$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で最小値 $\mathbf{1}$ をとり，$(x,\ y)=\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\ \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ で最大値 $\boldsymbol{\sqrt{10}}$ をとる。

2

(1) 直円錐 C の頂点を O，底面の円の中心を H とし，
底面の直径の 1 つを AB とする。
また，球 S の中心を I とする。このとき，この図形の，
平面 OAB による断面は右図のようになる。右図において，
球 S の断面は，I を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円である。
また，I は線分 OH 上にある。
球 S と直円錐 C の接点のうち母線 OA 上にあるものを
P とする。このとき，$\mathrm{OH} \perp \mathrm{AB}$，$\mathrm{IP} \perp \mathrm{OA}$，
$\mathrm{IH} = \mathrm{IP} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \mathrm{AP} = r$ である。
ここで，r の取り得る値の範囲は $r > \sqrt{2}$ である。



直円錐 C の高さを $\mathrm{OH} = h$，母線の長さを $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \ell$ とおく。
$\triangle\mathrm{OHA} \backsim \triangle\mathrm{OPI}$ より $\mathrm{HA} : \mathrm{AO} : \mathrm{OH} = \mathrm{PI} : \mathrm{IO} : \mathrm{OP}$ なので，
$r : \ell : h = \sqrt{2} : \left(h - \sqrt{2}\right) : (\ell - r)$ である。よって，

$$r : \ell = \sqrt{2} : \left(h - \sqrt{2}\right) \text{ より } \sqrt{2}\ell = r\left(h - \sqrt{2}\right) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$r : h = \sqrt{2} : (\ell - r) \text{ より } \sqrt{2}h = r(\ell - r) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①を ②$\times\sqrt{2}$ に代入して

$$2h = \sqrt{2}r(\ell - r) = r\left(\sqrt{2}\ell - \sqrt{2}r\right) = r\left(r\left(h - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}r\right) = r^2\left(h - 2\sqrt{2}\right)$$

よって，$2h = r^2\left(h - 2\sqrt{2}\right) \iff \left(r^2 - 2\right)h = 2\sqrt{2}r^2$

ここで，$r > \sqrt{2}$ より $r^2 - 2 > 0$ なので，$h = \dfrac{2\sqrt{2}r^2}{r^2 - 2}$

したがって，直円錐 C の体積 V は $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}\pi r^4}{3\left(r^2 - 2\right)}}$ $\quad \left(r > \sqrt{2}\right)$

(2)

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^4}{r^2 - 2}\right) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{4r^3\left(r^2 - 2\right) - r^4 \cdot 2r}{\left(r^2 - 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{2r^3\left(r^2 - 4\right)}{\left(r^2 - 2\right)^2}$$

なので，増減表は右のようになる。
よって，V は $r = 2$ のとき最小値
$V = \dfrac{2\sqrt{2}\pi \cdot 2^4}{3\left(2^2 - 2\right)} = \boldsymbol{\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi}$ をとる。

r	$\sqrt{2}$		2	
$\frac{dV}{dr}$		$-$		$+$
V	$(+\infty)$	$\searrow$		$\nearrow$

3

(1) $f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{1}{2}t^2\right)$ とおくと，$f'(t)=e^t-1-t$, $f''(t)=e^t-1$

よって，$t>0$ のとき $f''(t)=e^t-1>0$ なので，$f'(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加

よって，$t>0$ のとき $f'(t)>f'(0)=0$ なので，$f(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加

よって，$t>0$ のとき $f(t)>f(0)=0$

したがって，$t>0$ のとき　$f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{1}{2}t^2\right)>0 \iff 1+t+\dfrac{1}{2}t^2<e^t$

次に $g(t)=\left(1+t+\dfrac{1}{2}t^2e^t\right)-e^t$　とおくと，

$$g'(t)=1+\left(\frac{1}{2}t^2+t-1\right)e^t,\qquad g''(t)=\left(\frac{1}{2}t^2+2t\right)e^t$$

よって，$t>0$ のとき $g''(t)>0$ なので，$g'(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加

よって，$t>0$ のとき $g'(t)>g'(0)=0$ なので，$g(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加

よって，$t>0$ のとき $g(t)>g(0)=0$

したがって，$t>0$ のとき　$g(t)=\left(1+t+\dfrac{1}{2}t^2e^t\right)-e^t>0 \iff e^t<1+t+\dfrac{1}{2}t^2e^t$

(2) (1) より，$t>0$ において，$1+t+\dfrac{1}{2}t^2<e^t<1+t+\dfrac{1}{2}t^2e^t$ が成立するので，

$$t+\frac{1}{2}t^2<e^t-1<t+\frac{1}{2}t^2e^t \iff \frac{1}{t}+\frac{1}{2}<\frac{e^t-1}{t^2}<\frac{1}{t}+\frac{1}{2}e^t \quad \cdots\cdots ①$$

も成立する。よって，$x>0$ のとき，($x\leqq t\leqq 2x$ を満たす全ての t に対して $t>0$ なので，) ①より

$$\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)dt<\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t^2}\,dt<\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}e^t\right)dt \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する。ここで，

$$\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)dt=\left[\log t+\frac{1}{2}t\right]_x^{2x}=\log 2+\frac{1}{2}x$$

$$\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}e^t\right)dt=\left[\log t+\frac{1}{2}e^t\right]_x^{2x}=\log 2+\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^x\right)$$

なので，$x>0$ において

$$② \iff \log 2+\frac{1}{2}x<\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t^2}\,dt<\log 2+\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^x\right) \quad \cdots\cdots ③$$

$$\lim_{x\to+0}\left(\log 2+\frac{1}{2}x\right)=\log 2,\quad \lim_{x\to+0}\left(\log 2+\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^x\right)\right)=\log 2+\frac{1}{2}(1-1)=\log 2$$

なので，はさみうちの原理より $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t^2}\,dt=\mathbf{log\,2}$

(3) (2) より $c=\log 2$ である。③より，$x>0$ において

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}\left(\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t^2}\,dt-\log 2\right)<\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，$h(x)=e^x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$ なので，

$h'(x)=e^x$, $h'(0)=1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ である。したがって，特に $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ なので，④において，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\left(\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t^2}\,dt-\log 2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

4

(1) $X=2$ となるのは，点 P が $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}$ または $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ と移動するときなので，

$$p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

$X=3$ となるのは，点 P が $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ と移動するときなので，

$$p_3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{8}{27}}$$

$X=4$ となるのは，点 P が $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\begin{array}{l}\nearrow\mathrm{B}\to\mathrm{D}\\ \searrow\mathrm{C}\to\mathrm{D}\end{array}$ と移動するときなので，

$$p_4=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot p_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{4}{81}}$$

$X=5$ となるのは，点 P が $\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\begin{array}{l}\nearrow\mathrm{B}\to\mathrm{D}\\ \searrow\mathrm{C}\to\mathrm{D}\end{array}\\ \text{または}\\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\end{array}}$ と移動するときなので，

$$p_5=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot p_2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot p_3=\frac{4}{27}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{27}=\boldsymbol{\frac{8}{81}}$$

$X=6$ となるのは，点 P が $\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\\ \text{または}\\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\begin{array}{l}\nearrow\mathrm{B}\to\mathrm{D}\\ \searrow\mathrm{C}\to\mathrm{D}\end{array}\end{array}}$ と移動するときなので，

$$p_6=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot p_3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot p_2=\frac{4}{27}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{4}{81}}$$

(2) 点 P が $\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\ \text{と移動することを}\ \mathrm{A}_{\mathrm{III}}\\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\ \text{と移動することを}\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\ \text{と移動することを}\ \mathrm{D}_{\mathrm{III}}\\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\ \text{または}\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\ \text{と移動することを}\ \mathrm{D}_{\mathrm{II}}\end{array}}$ と表すことにする。

このとき，点 P が頂点 A を出発してから，次に A または D に辿り着くまでの移動方法は，必ず $\mathrm{A}_{\mathrm{III}},\mathrm{A}_{\mathrm{II}},\mathrm{D}_{\mathrm{III}},\mathrm{D}_{\mathrm{II}}$ のうちのいずれか 1 つである。（すなわち，いずれか 1 つだけが必ず起こる。）$\mathrm{A}_{\mathrm{III}},\mathrm{A}_{\mathrm{II}},\mathrm{D}_{\mathrm{III}},\mathrm{D}_{\mathrm{II}}$ が起こる確率を，それぞれ $a_{\mathrm{III}},a_{\mathrm{II}},d_{\mathrm{III}},d_{\mathrm{II}}$ と書くことにすると，

$a_{\mathrm{III}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，$a_{\mathrm{II}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，$d_{\mathrm{III}}=p_3=\dfrac{8}{27}$，$d_{\mathrm{II}}=p_2=\dfrac{4}{9}$ である。

（なお，$a_{\mathrm{III}}+a_{\mathrm{II}}+d_{\mathrm{III}}+d_{\mathrm{II}}=\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{4}{9}=1$ である。）

一般に，点 P は，移動を開始してから，$\mathrm{A}_{\mathrm{III}}$ または A_{II} の移動を何回か繰り返した後，最後に $\mathrm{D}_{\mathrm{III}}$ または D_{II} のいずれか一方の移動を 1 回だけ行って，移動を終了する。また，このとき

- $Y=$ ($\mathrm{A}_{\mathrm{III}}$ または A_{II} の移動を行った回数)
- $X=$ ($\mathrm{A}_{\mathrm{III}}$ または $\mathrm{D}_{\mathrm{III}}$ の移動を行った回数)$\times 3+$(A_{II} または D_{II} の移動を行った回数)$\times 2$

である。（ここまでは，(2), (3) 共通の設定）

(2) における「$X=3n$ かつ $Y=n-1$」となるのは，「$\mathrm{A}_{\mathrm{III}}$ の移動を $n-1$ 回行った後，$\mathrm{D}_{\mathrm{III}}$ の移動を 1 回行って，移動を終了する」場合に限られる。したがって，求める確率は

$$(a_{\mathrm{III}})^{n-1}\cdot d_{\mathrm{III}}=\left(\frac{4}{27}\right)^{n-1}\cdot\frac{8}{27}=\boldsymbol{\frac{2^{2n+1}}{3^{3n}}}$$

(3) 移動を終了するまでに，

- A_{III} または D_{III} の移動を行った回数を b,
- A_{II} または D_{II} の移動を行った回数を c

とする。このとき，常に $X=3b+2c$，$Y=b+c-1$ が成立するので，

「$X=3n$ かつ $Y=n$」となるための条件は，

$$\begin{cases}3b+2c=3n\\ b+c-1=n\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}b=n-2\\ c=3\end{cases}$$

である。よって，

- D_{II} の移動で，移動を終了するときには，
「A_{III} の移動 $n-2$ 回，A_{II} の移動 2 回」を行った後，D_{II} の移動で，移動を終了する。
したがって，このように移動する確率は ${}_n\mathrm{C}_2\left(a_{\text{III}}\right)^{n-2}\left(a_{\text{II}}\right)^2\cdot d_{\text{II}}$ である。

- D_{III} の移動で，移動を終了するときには，
「A_{III} の移動 $n-3$ 回，A_{II} の移動 3 回」を行った後，D_{III} の移動で，移動を終了する。
したがって，このように移動する確率は ${}_n\mathrm{C}_3\left(a_{\text{III}}\right)^{n-3}\left(a_{\text{II}}\right)^3\cdot d_{\text{III}}$ である。

以上より，求める確率は

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_2\left(a_{\text{III}}\right)^{n-2}\left(a_{\text{II}}\right)^2\cdot d_{\text{II}}+{}_n\mathrm{C}_3\left(a_{\text{III}}\right)^{n-3}\left(a_{\text{II}}\right)^3\cdot d_{\text{III}}\\
&={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{27}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\frac{4}{9}+{}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{27}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{9}\right)^3\cdot\frac{8}{27}\\
&={}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{4^{n-1}}{3^{3n}}+{}_n\mathrm{C}_3\cdot\frac{4^{n-2}\cdot 2}{3^{3n}}\\
&=\frac{4^{n-2}}{3^{3n}}\left\{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 4+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2\right\}\\
&=\frac{4^{n-2}}{3^{3n}}\cdot n(n-1)\left\{2+\frac{1}{3}(n-2)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+4)2^{2n-4}}{3^{3n+1}}}\end{aligned}$$

5

(1) A$(0,\ -1,\ -6)$, B$(1,\ -2,\ -4)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -1,\ 2)$,
C$(1,\ 1,\ 2)$, D$(2,\ 3,\ 1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ 2,\ -1)$ である。
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角 θ について，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|}=\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $\theta=\mathbf{120^\circ}$　（もしくは，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$）

次に，求めるベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると，

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\\ \left|\vec{n}\right|=\sqrt{3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a-b+2c=0\ \cdots\cdots①\\ a+2b-c=0\ \cdots\cdots②\\ a^2+b^2+c^2=3\ \cdots\cdots③\end{cases}$$

② − ① より $3b-3c=0\ \Leftrightarrow\ b=c$　これを① へ代入して $a=-c$
これらを ③ へ代入して，$(-c)^2+c^2+c^2=3\ \Leftrightarrow\ c=\pm 1$
したがって，求めるベクトル $\vec{n}$ は，$\vec{n}=\mathbf{(1,\ -1,\ -1)}$, $\mathbf{(-1,\ 1,\ 1)}$

(2) 条件 (a), (b) より，実数 $s,\ t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AL}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表せる。これより，原点を O として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ -1,\ -6)+s(1,\ -1,\ 2)=(s,\ -s-1,\ 2s-6)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ 1,\ 2)+t(1,\ 2,\ -1)=(t+1,\ 2t+1,\ -t+2)$$

したがって L$(s,\ -s-1,\ 2s-6)$, M$(t+1,\ 2t+1,\ -t+2)$ であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(t+1,\ 2t+1,\ -t+2)-(s,\ -s-1,\ 2s-6)\\&=(-s+t+1,\ s+2t+2,\ -2s-t+8)\end{aligned}$$

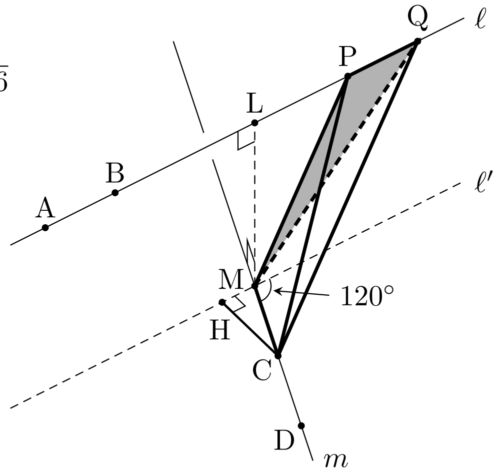
一方，条件 (c) と (1) より $\overrightarrow{\mathrm{LM}}\parallel(1,\ -1,\ -1)$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=k(1,\ -1,\ -1)$（$k$ は実数）と表せる。よって，

$$\begin{cases}-s+t+1=k\ \cdots\cdots④\\ s+2t+2=-k\ \cdots\cdots⑤\\ -2s-t+8=-k\ \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

④ + ⑤ より $3t+3=0\ \Leftrightarrow\ t=-1$
④ + ⑥ より $-3s+9=0\ \Leftrightarrow\ s=3$
（これらを④に代入して，$k=-3$）

したがって，$\mathbf{L(3,\ -4,\ 0)}$, $\mathbf{M(0,\ -1,\ 3)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(k+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
なので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$
また，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{LM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$
よって，△PQM において，
PQ を底辺とみたときの高さは LM である。
$\mathrm{LM}=\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right|=\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$
なので，△PQM の面積は



$\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot \mathrm{LM}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$ ……⑨

M を通り ℓ に平行な直線を ℓ' とする。
また，点 C から直線 ℓ' に下ろした垂線を CH とする。このとき，

- $\mathrm{LM}\perp\ell$ と $\ell /\!/ \ell'$ より $\mathrm{LM}\perp\ell'$，これと $\mathrm{LM}\perp m$ より $\mathrm{LM}\perp$（ℓ' と m を含む平面）
  よって，特に $\mathrm{LM}\perp\mathrm{CH}$ ……⑩
- $\ell'\perp\mathrm{CH}$ ……⑪

⑩，⑪より $\mathrm{CH}\perp$（面 PQM） なので，
面 PQM を底面とみたとき，四面体 PQMC の高さは CH である。

(1) より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角は 120° で，$\ell' /\!/ \ell /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので，ℓ' と m のなす角も 120° である。また，$\mathrm{MC}=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ なので，

$\mathrm{CH}=\mathrm{MC}\sin 120^\circ=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ ……⑫

⑨，⑫ より，四面体 PQMC の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PQM}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$